COMPLEXES

I) Définition

1) Forme algébrique

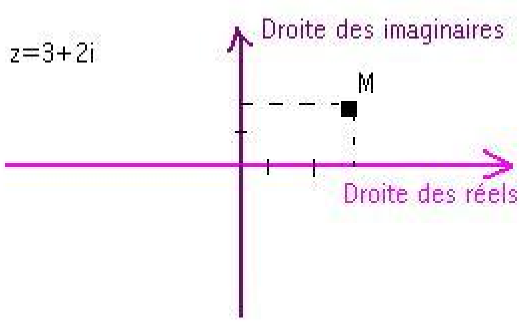
Soit un point M du plan de coordonnées (x, y), l'affixe de M est le nombre complexe z=x+iy où i est le nombre imaginaire qui vérifie $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

- x+iy est la forme algébrique de z. (avec x $\in \mathbb{R}$ et y $\in \mathbb{R}$)
- x est la partie réelle de z : on la note x=Re(z)
- y est la partie imaginaire de z : on la note y=Im(z)
- z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Exemple :

z=3+2i



Soient z=x+iy et z'=x'+iy'

z=z' $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Re(z)=0 $\Leftrightarrow$ z=iy $\Leftrightarrow$ z est un imaginaire pur
Im(z)=0 $\Leftrightarrow$ z=x $\Leftrightarrow$ z est un réel

Tout point M du plan d'affixe z=x+iy a pour symétrique par rapport à l'axe des abscisses le point d'affixe z'=x-iy.

x-iy est le conjugué de x=iy, noté $\bar{z} = x - \mathrm{iy}$.

Relations entre complexes : $\forall z$ et $z' \in \mathbb{C}$

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ $\qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ $\qquad \left(\overline{z^n}\right) = \left(\bar{z}\right)^n$

z- $\bar{z} = 2\mathrm{iy} = 2\mathrm{Im}(z)$

z+ $\bar{z} = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$

z est réel $\Leftrightarrow$ z = $\bar{z}$

z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ z = - $\bar{z}$

Si A et B ont pour affixe z_a et z_b , alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_B - z_A$

Exemples :

cf la partie exercices relative aux Complexes

2) Forme trigonométrique

Soit z=a+ib, d'image M. La distance OM est appelée module de z, noté $|z|$ et on a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$

Soit z=a+ib, d'image M. Un argument de z, noté arg(z) est une mesure en radian de l'angle ($\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$)= θ .

arg($\bar{z}$)= - arg(z)

L'écriture z = r (cos θ +i sin θ) est la forme trigonométrique de z.

---

z=a+ib=r(cos θ +isin θ) $\longrightarrow$ $\begin{array}{l} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{array}$

donc $\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{array}$

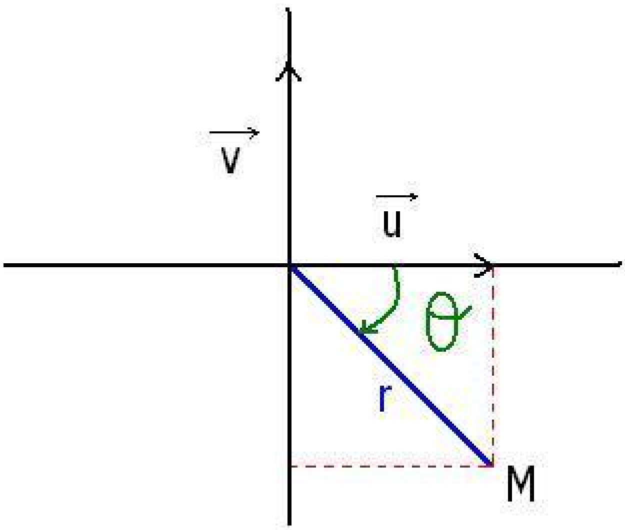


Figure 1: z=1-i

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2$

arg(z) :

⊛ cos θ = $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⊛ sin θ = - $\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Soient z = r (cos θ +i sin θ) et z' = r' (cos θ' +i sin θ')

z=z' ⇔ $\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \ [2\pi] \end{cases}$

$|z \times z'| = |z| \times |z'|$
$|z|^n = |z^n|$ (n $\in \mathbb{N}$)

arg ($\frac{z}{z'}$) = arg(z)-arg(z')
arg (z $\times$ z') = arg(z)+arg(z')
arg (z^n) = n arg (z) $[2\pi]$ *(se démontre par récurrence)*

3) Forme exponentielle

$\forall\, \theta$ réel, on a cos θ +i sin θ = $e^{i\theta}$.

La forme exponentielle des complexes z de module r et d'argument θ est z = r $e^{i\theta}$.

II) Applications

1°) Equations du second ordre

Soit l'équation a $z^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c $\in \mathbb{R}$ (a $\neq$ 0)
$\Delta = b^2 - 4ac$
⊛ Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, on applique les règles habituelles
⊛ si $\Delta < 0$, alors $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple :
$z^2 + z + \frac{3}{2} = 0$
$\Delta = -5$
d'où $z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{5}}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}i$
et $z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$

2°) Les transformations du plan

Soit f la transformation du plan qui à un point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe M'.

⊛ Si z'=z+b (b $\in \mathbb{C}$) ⇔ f est la translation de vecteur d'affixe b

⊛ Si z'-ω = $e^{i\theta}(z-\omega)$ ($\omega \in \mathbb{C}$; $\theta \in \mathbb{R}$) ⇔ f est la rotation d'angle θ , de centre Ω et d'affixe ω.

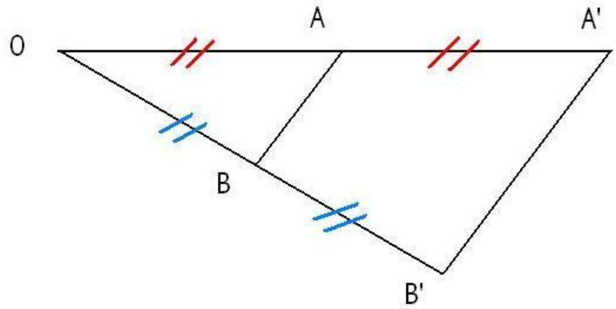
⊛ Si z' - ω = k (z - ω) ($\omega \in \mathbb{C}$; $k \in \mathbb{R}^*$) ⇔ f est l'homothétie de rapport k, de centre Ω et d'affixe ω.

Rappel :

L'homothétie de centre Ω et de raport k est la transformation qui transforme M en M' tel que $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Exemple :

L'homothécie h de centre O et de rapport 2. $\overrightarrow{\mathrm{OA}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.



3°) Géométrie

⊛ distance AB = $|z_B - z_A|$

⊛ $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$

⊛ $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ *(l'angle)*